



# Prozesskennzahlen in der Produktionstechnik

Der neue Robustheitsindex  $c_{pr}$

# Der Referent

Wolf-Rüdiger Landschoof

Aggregateentwicklung,  
TE Wolfsburg

verantwortlich für  
Qualitätsmethoden und  
Gewichtsermittlungen

Leiter des AK Toleranzmanagement  
Powertrain im Konzern

Eintritt in die Volkswagen AG 1985

[Wolf-Ruediger.Landschoof@Volkswagen.de](mailto:Wolf-Ruediger.Landschoof@Volkswagen.de)



# Agenda

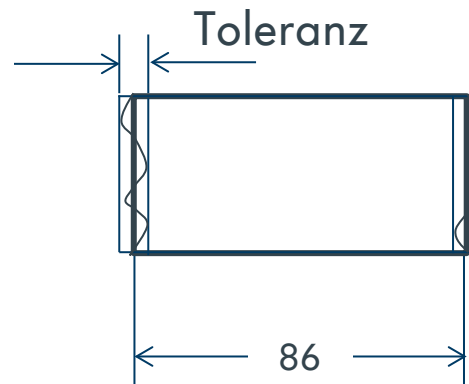
- 1 Toleranzen, Passungen und Maßketten
- 2 Fertigungsverteilungen und Prozesskennwerte
- 3 Der Robustheitsindex  $c_{pr}$  anhand von Beispielen,  $c_{pr}$  - Verläufe
- 4 Robuste Systeme
- 5 Umgang mit Positionstoleranzen - Betragsverteilungen
- 6 Beispiele für Tolerierungen
- 7 Beispielaufgabe

# Toleranz eines geometrischen Maßes (1/2)

**Ein vorgegebenes Maß kann nie ganz genau eingehalten werden.  
Es wird immer fertigungsbedingt Abweichungen geben.**

1. Definition der „Toleranz“:

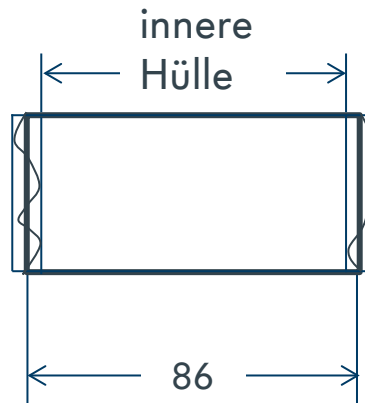
Eine Toleranz ist die größte zulässige Herstellungsabweichung eines geometrischen Maßes.



# Toleranz eines geometrischen Maßes (2/2)

## 2. Definition der „Hülle“:

Eine Hülle ist die größte innenliegende oder kleinste außenliegende **zwei- bzw. dreidimensionale** Form, deren Geometrie der tolerierten Form (hier: Rechteck) gleicht.



**Die Kontur darf die Hülle nicht durchstoßen!**

# Passungen und Maßketten

## Passungen (2 Bauteile bzw. 2 Maße)

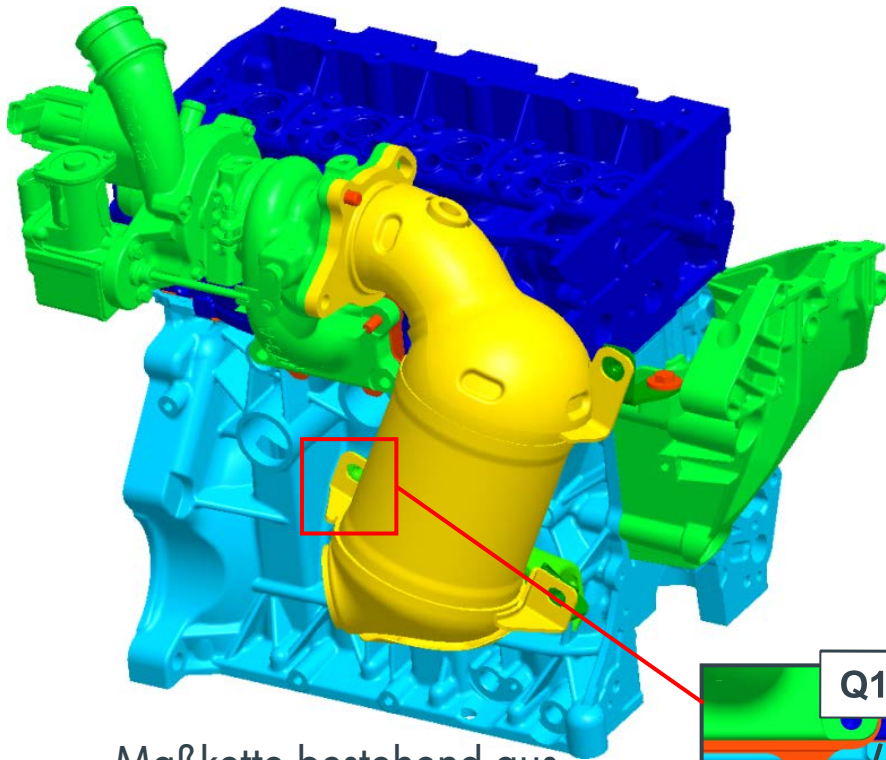
- das minimal bzw. maximal auftretende Maß ist bedeutend
- der Konstrukteur wählt die Toleranzhüllen

## Maßketten (3 und mehr Bauteile bzw. Maße)

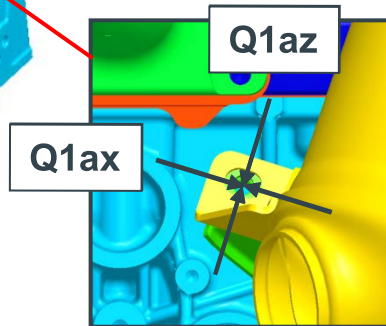
- die Schließmaßvarianz ist bedeutend
- der Konstrukteur wählt die Varianz und dann Toleranz und Form(faktor)

# Maßkette am Beispiel Vorkatalysator

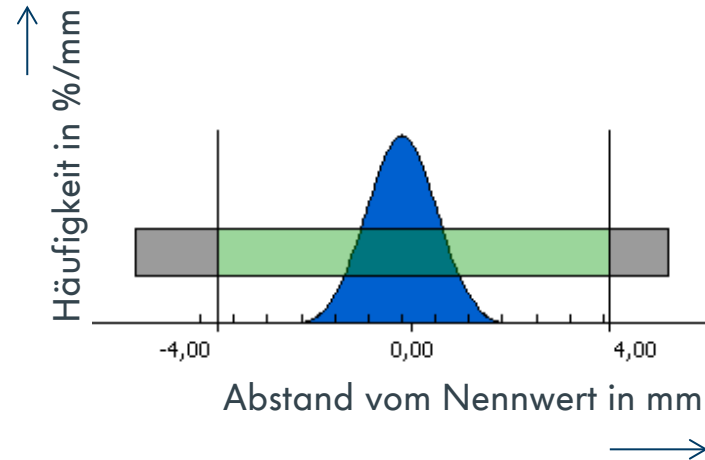
## Befestigung Vorkatalysator an Zylinderkurbelgehäuse und an ATL



Maßkette bestehend aus Hauptbauteilen Zylinderkurbelgehäuse, Zylinderkopf, Turbolader und Vorkatalysator



Schließmaßverteilung als Ergebnis der statistischen Toleranzberechnung



Das Schließmaß („Q1a“) der Maßkette ist die Abweichung der Bohrungsmittelachse im Zylinderkurbelgehäuse und der Mittelachse im Befestigungsloch am Halter des Vorkatalysators.

# Fertigungsverteilungen

Anwendungsbereich		Motor	
Messreihe 1:	Bauteil 1	Anzahl:	185 Einheiten an 42 Tagen
Verteilungsform:	Normalverteilung, zeitabhängiges Verteilungsmodell C1		
Histogramm:			
		Auswertungssoftware: qs-STAT	

USG: untere Spezifikationsgrenze

OSG: obere Spezifikationsgrenze



# Prozesskennwerte

Prozesskennwerte sind dimensionslose relative Größen, um die Qualität von Fertigungsprozessen zu beschreiben.

$$c = \frac{\textit{charakteristische Größe}}{\textit{Bezugsgröße}} \quad \text{Kennwert}$$

$$c_p = \frac{\textit{Bezugsgröße}}{\textit{charakteristische Größe}} \quad \text{Prozesskennwert}$$

Üblicherweise wird von *Fähigkeitskennwerten* gesprochen. Damit wird besonders zum Ausdruck gebracht, ob es möglich ist, die Toleranz einzuhalten.

# Prozesskennwerte

## Prozessfähigkeitsindex $c_p$

*Beschreibung der Breite der Streuung bzw. der Verteilung*

Bezugsgröße: Toleranz T

charakteristische Größe:  $6 * \text{Standardabweichung } \sigma$

*Definition*  $c_p = \frac{T}{6 * \sigma}$

## Prozessfähigkeitsindex $c_{pk}$

*Beschreibung der Breite der Streuung und des Abstands zur Toleranzgrenze*

Bezugsgröße: Abstand Mittelwert zur Toleranzgrenze

charakteristische Größe: halbe Verteilungsbreite (B)

*Definition*  $c_{pk} = \min ( (OSG - \mu) / (B/2) ; (\mu - USG) / (B/2) )$

## Robustheitsindex $c_{pr}$

*Beschreibung der Breite der Streuung und des Abstand zum Mittenwert*

Bezugsgröße: Toleranz T

charakteristischen Größe:  $6 * \text{Wurzel aus quadratischem Fehler zum Mittenwert}$

*Definition*  $c_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{L}}$  mit  $L = \sigma^2 + (m - \mu)^2$

# Prozesskennwerte

## Robustheitsindex $c_{pr}$

*Definition*  $c_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{L}}$  mit  $L = \sigma^2 + (m - \mu)^2$

$$c_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{\sigma^2 + (m - \mu)^2}}$$

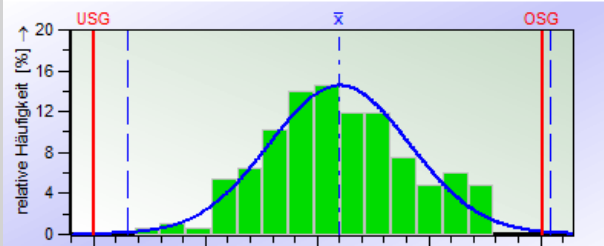
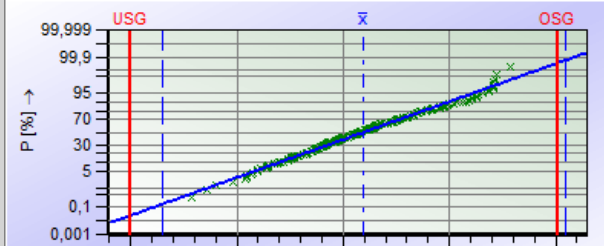
T : Toleranz = Differenz OSG –USG

m: Mittenwert (oder auch Zentralwert) = (OSG+USG)/2

$\mu$ : Mittelwert (der Grundgesamtheit)

$\sigma$ : Standardabweichung (der Grundgesamtheit)

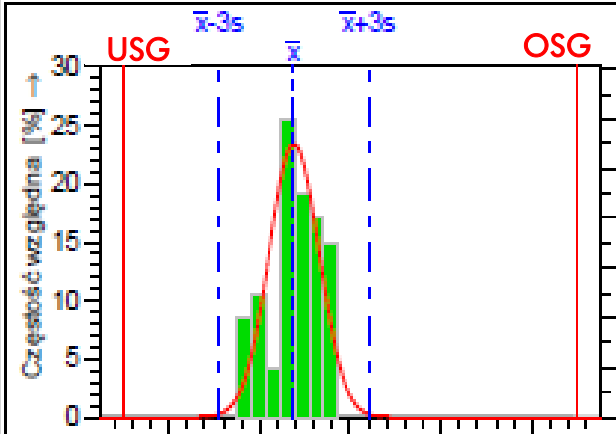
# Fertigungsverteilungen, Beispiel 1

Anwendungsbereich		Motor	
Messreihe 1:	Bauteil 1	Anzahl:	185 Einheiten an 42 Tagen
Verteilungsform:	Normalverteilung, zeitabhängiges Verteilungsmodell C1		
Histogramm:		Cp: 1,06	
		Cpk: 0,95	
		Cpr: 1,01	

**Verteilung ist mittenzentriert**

Quelle: DMF (Dimensional Management Forum)

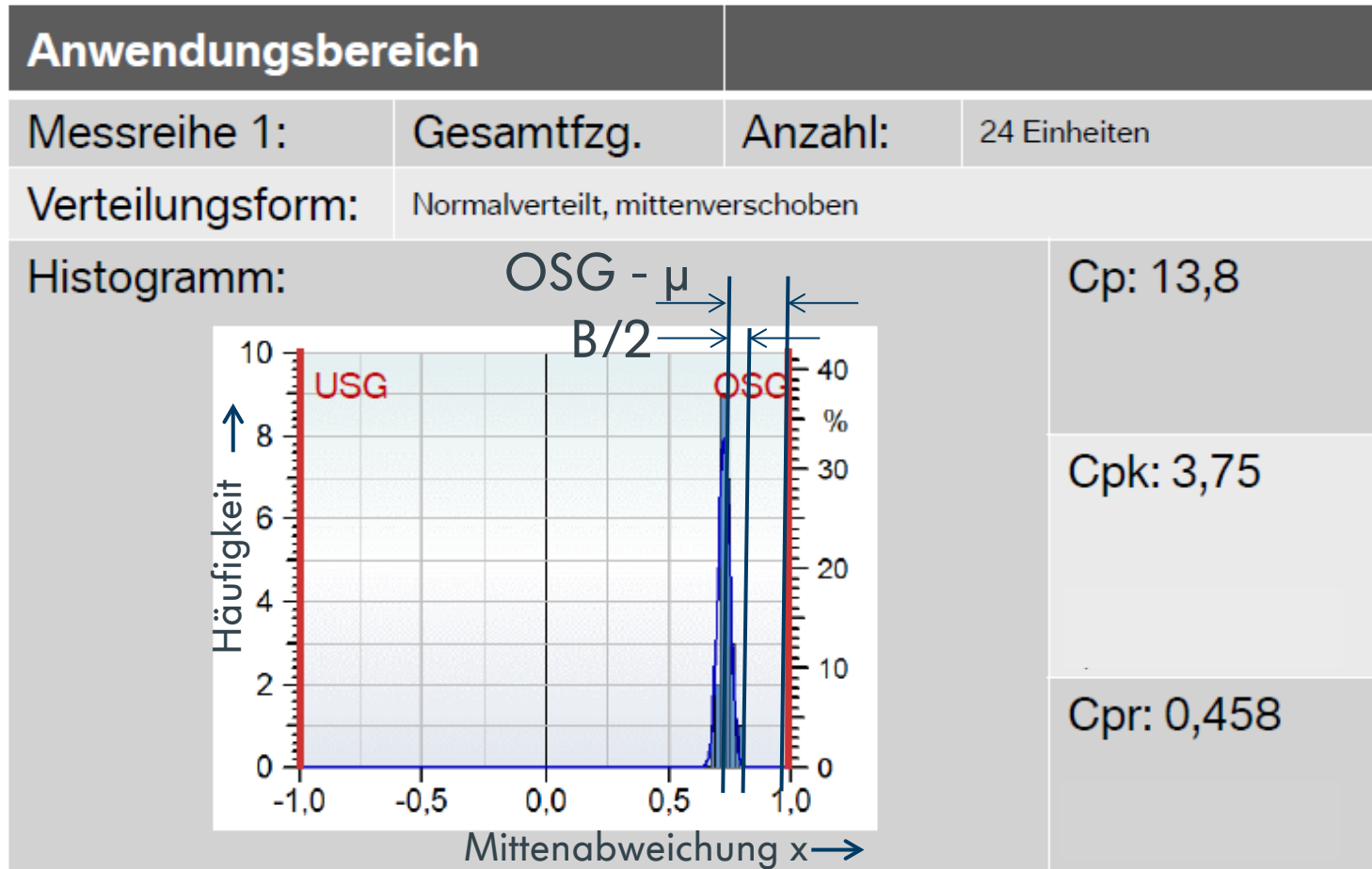
# Fertigungsverteilungen, Beispiel 2

Anwendungsbereich		Motor	
Messreihe 2:	Bauteil 2	Anzahl:	47 Einheiten an 2 Tagen
Verteilungsform:	Normalverteilung		
Histogramm:			Cp: 3,05
			Cpk: 2,29
			Cpr: 1,22

**enge Verteilung außermittig**

Quelle: DMF (Dimensional Management Forum)

# Fertigungsverteilungen, Beispiel 3



## Nadelverteilung in Randnähe

Quelle: DMF (Dimensional Management Forum)

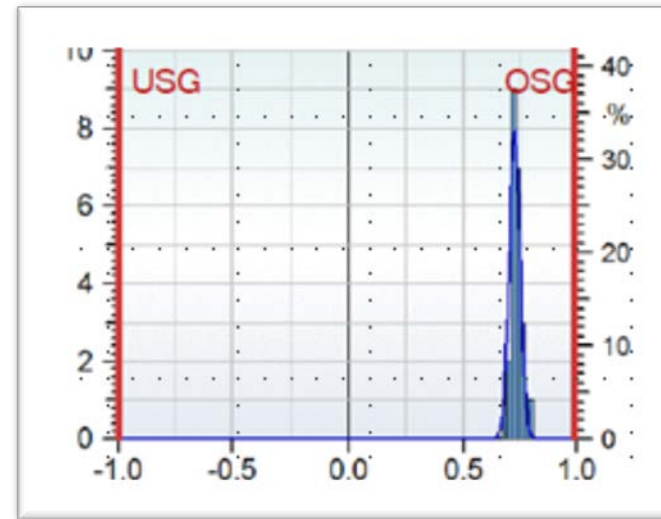
# Beispiele für $c_{pr}$

Annahme: symmetrische Verteilung um Mittenmaß  
 ( $c_p = c_{pr}$ )

Verteilungstyp	Kurzbez.	Varianz	$c_{pr}$
Rechteckverteilung	RV	$T^2 / 12$	0,58
Dreiecksverteilung	DV	$T^2 / 24$	0,82
Normalverteilung +/- 2,5 s	NV5s	$T^2 / 25$	0,83
Normalverteilung +/- 3 s	NV6s	$T^2 / 36$	1,00
Normalverteilung +/- 4 s	NV8s	$T^2 / 64$	1,33

# Beispiele für $c_{pr}$

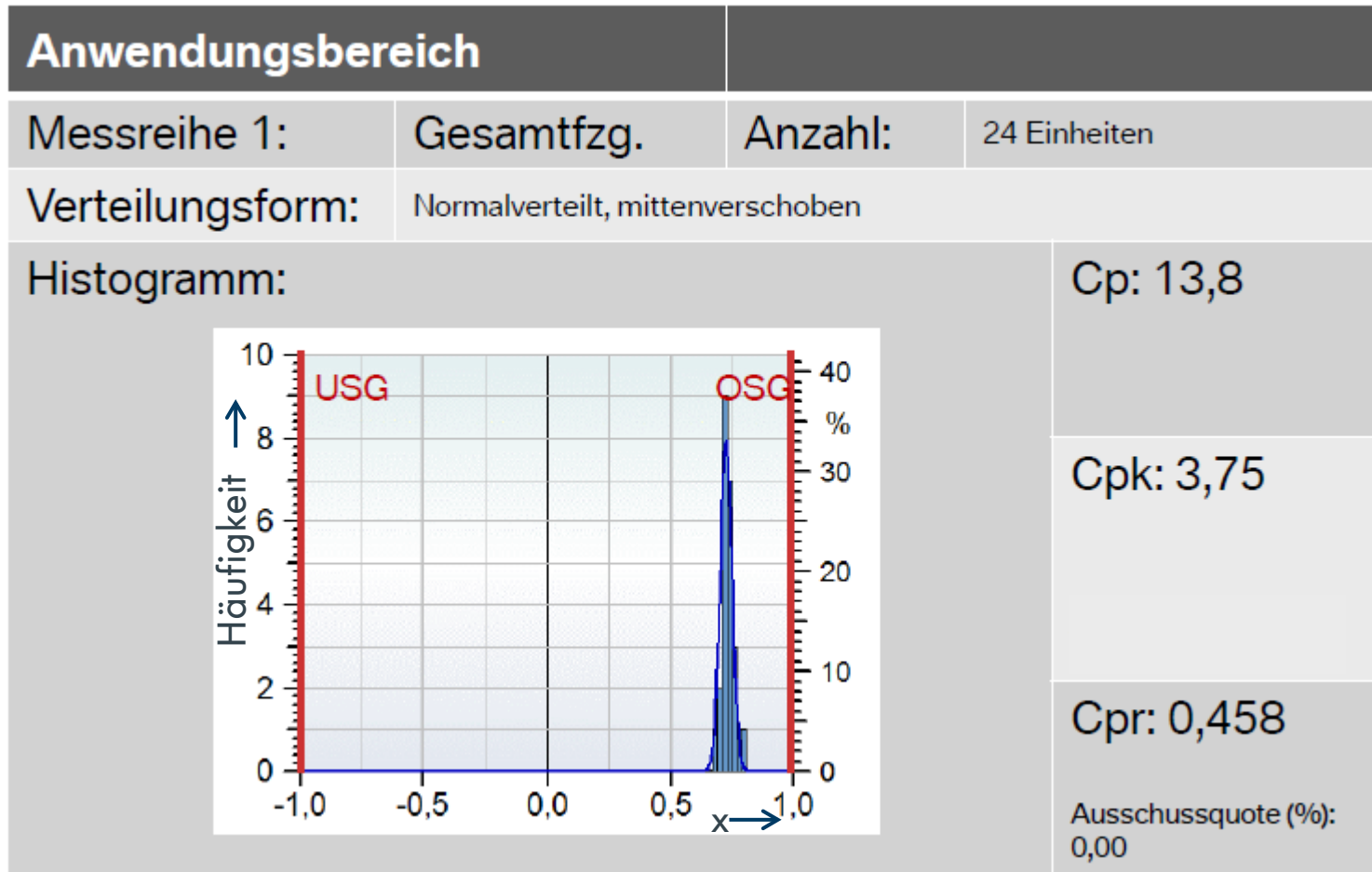
Grenzbetrachtung für  
 $\sigma \rightarrow 0$  („Nadelverteilung“)



Kennwert	in der Mitte	am Rand
$c_p$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
$c_{pr}$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 1/3$
$c_{pk}$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty / \infty$



# Fertigungsverteilungen, Beispiel 3



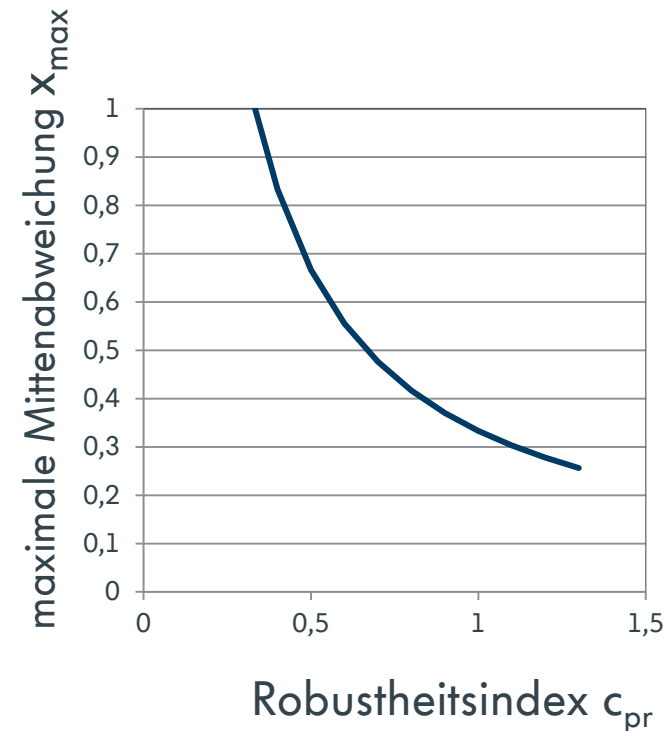
**Robustheitsindex strebt gegen Grenzwert 0,333**

# Maximale Mittenabweichung

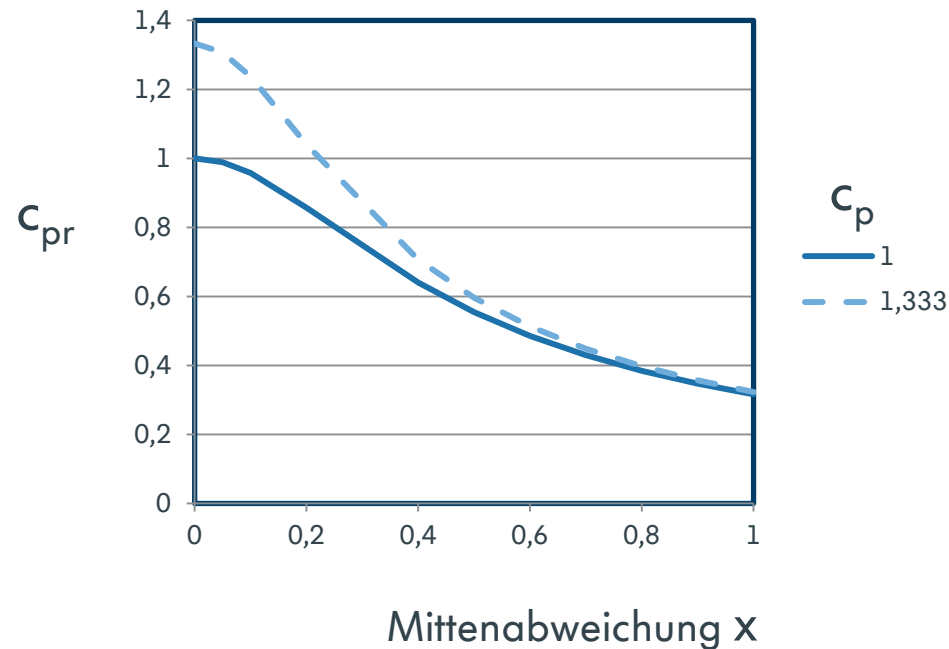
Mit dem Robustheitsindex wird die maximal mögliche Mittenabweichung begrenzt. Der Wert ergibt sich der Definition, wenn  $\sigma = 0$  gesetzt wird.

$$x = \frac{|m - \mu|}{T/2}$$

Forderung  $x < x_{max} = \frac{1}{3 * c_{pr}}$



# Verlauf $c_{pr}$ über Mittenabweichung



**Robustheitsindex sinkt mit zunehmender Mittenabweichung**

# Robuste Systeme

Ziel für Auslegung von Baugruppen:

Robuste Systeme, die unanfällig gegen Störungen sind

Zielerreichung durch:

- optimierte Maßketten
- **enge Toleranzverteilung der Einzelmaße**
- **mittenkonzentrierte Verteilungen der Einzelmaße**

Maßketten:

- Schließmaßmittelwert ist Summe der Einzelmittelwerte
- Schließmaßvarianz ist Summe der Einzelvarianzen
- quadratischer Schließmaßfehler ist Summe der quadratischen Einzelfehler

**Ein hoher Robustheitsindex steht für enge, mittenkonzentrierte Verteilung und kleine quadratische Fehler.**

# Beispiel für Tolerierung

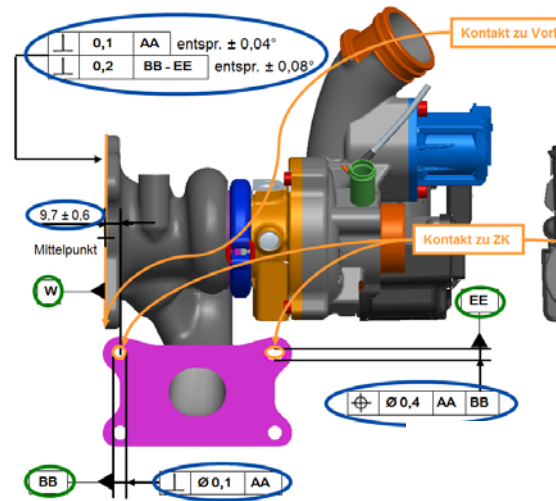
## Beispiel einer statistischen Toleranzvorgabe

$$42 \pm 1,0 ; \boxed{ST} \quad c_{pr} > 1,333$$

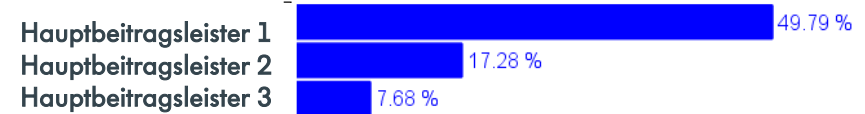
Eine Vorgabe für  $c_{pr}$  kann auch über Lieferantenvereinbarungen erfolgen, z.B. für Prüfmaße.

**Die statistische Tolerierung ist eine zusätzliche Vorgabe.**

# Beispiel: Verschraubung eines Abgasturboladers



Q1ax - S Q1ax Statistische Beitragsleister



## Hauptbeitragsleister 1

Vorgabe:  $42 \pm 1$  ;  $c_{pr} > 1,33$

$$c_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{\sigma^2 + (m - \mu)^2}}$$

T: Toleranz    m: Mittenwert    μ: Mittelwert

T = 2            m = 42            μ = 42,14

T = 2            m = 42            μ = 42,09

σ : Standardabweichung

σ = 0,23

σ = 0,23



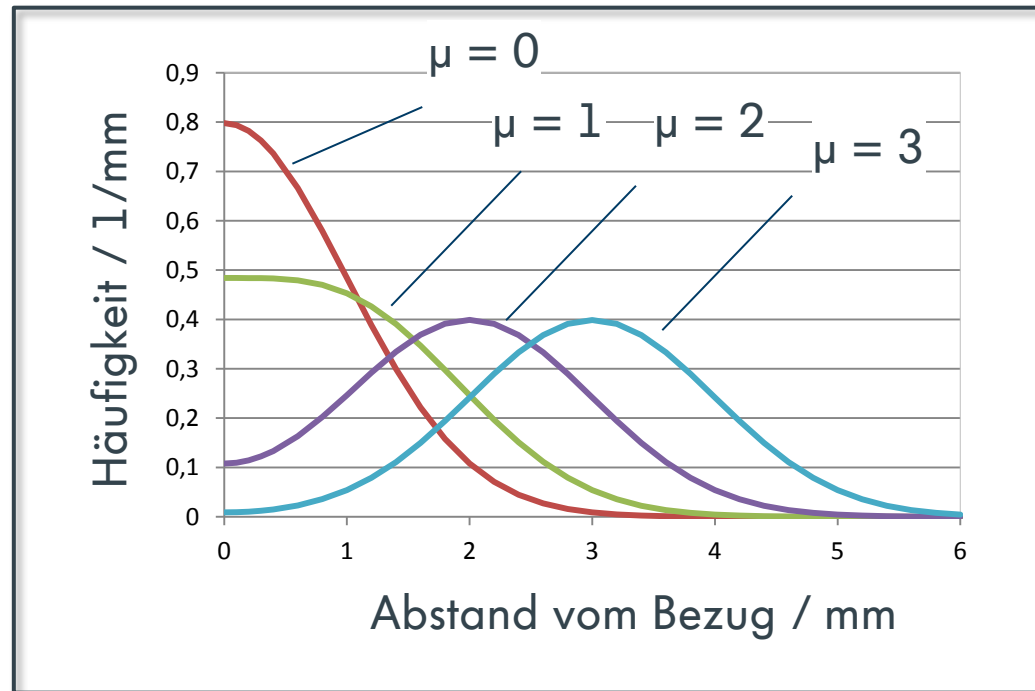
Robustheit

$c_{pr} = 1,224$  n.i.O.

$c_{pr} > 1,33$  i.O.

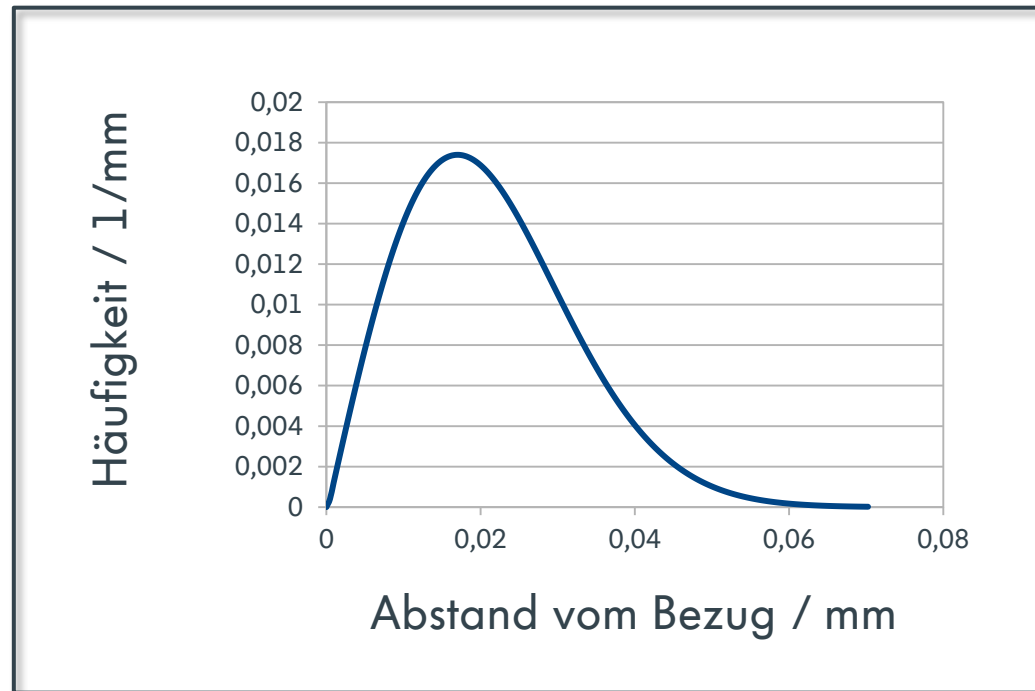
# Bezugstoleranzen / Positionstoleranzen

## Eindimensionaler Bezug – Betragsverteilung 1. Art



# Bezugstoleranzen / Positionstoleranzen

## Zweidimensionaler Bezug – Betragsverteilung 2. Art





# Bezugstoleranzen / Positionstoleranzen

Vorgehensweise:

In der Formel für Robustheitsindex den Mittenwert zu Null setzen!  
( $m = 0$ )

$$C_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{\sigma^2 + (0 - \mu)^2}}$$

**Der Robustheitsindex gilt auch für Positionstoleranzen.**

# Beispielaufgabe zu $c_p$ , $c_{pk}$ , $c_{pr}$

Eine Baugruppe besteht aus 3 Bauteilen. Diese bilden eine lineare Maßkette. Durch einen geregelten Prozess streuen die Fertigungsmaße um den Nennwert der symmetrisch ausgelegten Toleranzen.



Zahlenwerte: Mittenmaße  $m = 0$ , Toleranzen  $\pm 0,5$  ( $T=1$ ), Standardabweichungen  $s = 1/6$ , Normalverteilung

1. Bestimmen Sie jeweils  $c_p$ ,  $c_{pk}$  und  $c_{pr}$ !
2. Das obere arithmetische Schließmaß  $T_{so,arithm}$  beträgt 1,5. Wie groß ist das stat. Schließmaß  $T_{so,stat}$  (Annahme  $\pm 3s$ )?

# Beispielaufgabe zu $c_p$ , $c_{pk}$ , $c_{pr}$

Der Fertigungsleiter berichtet stolz, er würde für Bauteil 3 eine neue Fertigungslinie in Betrieb nehmen. Damit könne die Streuung deutlich eingeeengt werden.

3. Berechnen Sie für Bauteil 3 die Werte  $c_p$  und  $c_{pr}$  und für die Maßkette  $T_{os,stat}$  mit  $s = 1/12$  und dem Mittelwert  $\mu$  (Mittenabweichung)!

a.  $\mu = 0$

b.  $\mu = 0,14$

c.  $\mu = 1 / 4 = 0,250$

Unter welcher Voraussetzung wird sich in der Baugruppe die Qualität verbessern?

# Beispielaufgabe zu $c_p$ , $c_{pr}$ , $c_{pk}$

## Lösung

Aufgabe Nr.	Bauteil 3					Schließmaß	
	Sigma	$\mu$	$\mu$ relativ	$c_p$	$c_{pr}$	Tos,arithm	Tos,stat
1.,2.	0,1667	0	0	1,000	1,000	1,5	0,866
3a.	0,0833	0	0	2,000	2,000	1,5	0,750
3b.	0,0833	0,140	0,280	2,000	1,023	1,5	0,890
3c.	0,0833	0,250	0,500	2,000	0,632	1,5	1,000

Die Qualität wird sich nur erhöhen, wenn

$$c_{pr,neu} > c_{pr,alt} .$$

# Zusammenfassung

Der neue Robustheitsindex  $c_{pr}$  ist

- Maß für die Qualität eines Maßes
- einfach aus 4 Größen zu berechnen
- gültig für alle Verteilungsformen, nicht nur für Normalverteilungen
- für Positionstoleranzen gültig
- umfassend, da Vorgabe für  $c_{pr}$  Vorgabe für  $c_p$  einschließt ( $c_p > c_{pr}$ )
- Voraussetzung für die statistische Tolerierung

$$c_{pr} = \frac{T}{6 * \sqrt{\sigma^2 + (m - \mu)^2}}$$